Super-résolution d'impulsions de Diracs par échantillonnage de Fourier aléatoire

Yann Traonmlin, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, France

Nicolas Keriven, Rémi Gribonval, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, France

Gilles Blanchard, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Germany

Estimer des sommes d'impulsions de Diracs à partir d'observations linéaires en utilisant des méthodes variationnelles convexes a récemment été l'objet de différentes études : il a été montré que si les Diracs sont suffisament séparés, il est possible d'estimer leurs positions aprs leur convolution par un filtre passe bas [1]. Ce problème de super-résolution a de plus été relié à un problème de reconstruction de densité de probabilité à partir de moments empiriques généralisé ("sketches")[2]. Ces résultats suggèrent qu'une somme d'impulsions de Diracs peut être estimée à partir de mesures de Fourier aléatoires au lieu de mesures régulières des basses fréquences.

Soit δ_t la mesure de Dirac à la position t dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des mesures de Radon. On cherche à retrouver les éléments $\Sigma_{k,\epsilon} = \{\sum_{i=1,k} a_i \delta_{t_i} : \forall k \neq l, \|t_k - t_l\|_2 \geq \epsilon, \|t_i\|_\infty \leq 1,\ a_i \in \mathbb{R}_+, t_i \in \mathbb{R}^d\}$ à partir d'observations linéaires. Le paramètre de résolution ϵ représente la séparation minimum entre impulsions. On étudie la reconstruction de $x_0 \in \Sigma_{k,\epsilon}$, à partir d'observations linéaires bruitées $Ax_0 + e$ avec $Ax_0 = (\int_t x_0(t) f_i(t) dt)_{i=1,m}$ où $f_i(t) = e^{j\langle \omega_i, t\rangle}/c_{\omega_i}$, $(\omega_i)_{i=1,m}$ est un ensemble de fréquences de $\mathbb{R}^d$ et c_{ω_i} est une pondération. On compare deux opérateurs :

- A_U**: Echantillonnage de Fourier régulier (filtre passe bas)**: les $(\omega_i)_{i=1,m}$ échantillonnent uniformément l'ensemble $[-\frac{\pi q}{2}, \frac{\pi q}{2}]^d$ où q est un entier et $m = (2q+1)^d$. Ici $c_\omega = 1$.
- A_R**: Echantillonnage de Fourier aléatoire pondéré**: Chaque ω_i est une fréquence tirée aléatoirement selon la distribution de probabilité proportionnelle à $c_\omega e^{-\sigma^2\|\omega\|_2^2/2}$ (où σ est le paramètre réglant la distribution de fréquences, ici $c_\omega = \sqrt{2 + \sigma^2\|\omega\|_2^2 + \sigma^4\|\omega\|_2^4}$ est un terme de pondération).

En dimension un, il est possible d'utiliser une méthode convexe à partir d'observations par A_U si $m \geq \frac{2}{\epsilon}$ [1] ($m \geq O(1/\epsilon)$ est une condition nécessaire pour ces méthodes convexes). On considère la méthode de super-résolution "idéale"

$$x^* = \underset{x \in \Sigma_{k,\epsilon}}{\operatorname{argmin}} \|Ax - (Ax_0 + e)\|_2. \tag{1}$$

On considère de plus une métrique $\|\cdot\| := \|\cdot\|_h = \|h \star \cdot\|_2$ où h est un noyau de convolution gaussien (de variance $1/\sigma^2$) pour quantifier l'erreur de reconstruction. On établit le théorème suivant

Théorème *Soit* $\sigma_k := \frac{1}{2.4(\ln k + 10)}$, $\epsilon > 0$, $\sigma \leq \sigma_k \epsilon$ *et* $h(t) = e^{-\|t\|_2^2/(2\sigma^2)}$.
Supposons $m \geq O(k^2 d^3 \textit{polylog}(k,d) \log(1/\epsilon))$. *Alors, pour tout* $x_0 \in \mathcal{B}$ *et* $y = A_R x_0 + e$, *avec grande probabilité sur le tirage de* A_R, *on a*

$$\|x^* - x_0\|_h \leq C(\|e\|_2 + d_h(x_0, \Sigma)) \tag{2}$$

où x^* *est un minimiseur de* (1) *et* $d_h(x_0, \Sigma_{k,\epsilon}) = \inf_{x \in \Sigma_{k,\epsilon}} \|x_0 - x\|_h$ *est l'erreur de modélisation.*

Ainsi pour k, d fixés, seulement $m = O(\log(1/\epsilon))$ mesures avec A_R sont suffisantes pour la reconstruction (comparé au cas du filtre passe bas A_U, en dimension un, où $m = O(1/\epsilon)$ sont nécessaires pour les méthodes convexes). Ce théorème donne aussi la distribution selon laquelle on tire A_R. Ces résultats sont confirmés par des expériences utilisant une heuristique approchant la méthode de super-résolution idéale étudiée.

Références

[1] E.J. Candes and C. Fernandez-Granda, *Super-resolution from noisy data*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 19(6):1229–1254, 2013.

[2] N. Keriven, N. Tremblay, Y. Traonmilin, and R. Gribonval, *Compressive K-means*, ICASSP, 2017.

Yann Traonmlin, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, Campus de Beaulieu,
FR-35042 Rennes Cedex, France
`yann.traonmilin@inria.fr`